

|             |   |
|-------------|---|
| Title       | ある種のtデザインとハイパーグラフのハイパークロー分解(コードとデザインを中心とした組合せ数学)                                |
| Author(s)   | 山本, 純恭; 藤井, 淑夫  |
| Citation    | 数理解析研究所講究録 (1986), 587: 173-178   |
| Issue Date  | 1986-04   |
| URL         | <a href="http://hdl.handle.net/2433/99396">http://hdl.handle.net/2433/99396</a> |
| Right       |   |
| Type        | Departmental Bulletin Paper   |
| Textversion | publisher   |

## ある種の $m$ デザインとハイパーグラフの ハイパークロー分解

山本 純恭 (岡山理科大学)  
藤井 淑夫 (岡山理科大学)

$\Omega$  を  $m$  項目に関するバイナリー・レコードの集合、 $Q$  を  $k$  項目の質問の集合とする。Balanced Filing Schemes of order  $k$  (略して  $BFS_k$ ) とは、一定数 ( $c$  個) の  $k$  項目の質問の集合にたいして 1 つのバケツを用意し、これらの質問のいずれか 1 つに該当するレコードの情報を収納する方式である。したがって、 $BFS_k$  を  $c:1$  の  $Q$  からバケツの番地の集合  $B$  への写像を用意することと捉えることもできる。

数多くの可能な  $BFS_k$  に対する選択の基準としては、ファイルの冗長度、すなわち 1 レコードあたりの平均収納回数の小さいことがあげられる。冗長度に関してはつぎの定理がある。

定理 [2,6] レコードの分布が項目の置換に対して不変であるとする。そのとき、トリビアルな場合を除いて、1 つのレコードが 1 つのバケツに収納される確率は、バケツが  $k-1$  項目を共有する  $c$  個の  $k$  項目の質問からなりたっているとき、したがって、バケツのグラフ構造が 次数  $c$  の  $k$ -ハイパークローであるとき、かつそのときにかぎり最小となる。

すべてのバケツのグラフ構造が 次数  $c$  の  $k$ -ハイパークローからなりたっている  $BFS_k$  を  $HUBFS_k$  という。したがって、 $HUBFS_k$  は最小の冗長度をもつ  $BFS_k$  である [2,6]。

$V$  を  $|V|=m$  の有限集合とし (項目の集合に対応)、 $E=\{E_i \mid i \in I\}$  を  $V$  の部分集合の族で  $\cup E_i = V$  とする。このとき  $H=(V, E)$  をハイパーグラフとよぶ。特に  $E$  が  $|E_i|=k$  をみたす  $k$ -エッジ ( $k$  項目の質問に対応) のすべてからなるとき 完全ハイパーグラフ とよび、 $H_{m,k}$  とかく。  $c$  個の  $k$ -エッジの集合  $\{E_1, E_2, \dots, E_c\}$  において  $| \cap E_i | = k-1$  のとき、次数  $c$  の  $k$ -ハイパークローとよび、 $k$ -HC とかく。

完全ハイパーグラフ  $H_{m,k}$  の  $(\varphi)$  個の  $k$ -エッジが  $(\varphi)/c$  個のエッジを共有しない 次数  $c$  の  $k$ -ハイパークローの和に分解されるとき、 $H_{m,k}$  は 次数  $c$  の  $k$ -HC 分解可能であるという。

定理 [2,3,7] 与えられた  $m$  と  $k$  に対して  $c:1$  の  $HUBFS_k$  が構成可能であることと  $H_{m,k}$  が 次数  $c$  の  $k$ -HC 分解可能であることは同値である。

$H_{m,k}$  の  $k$ -HC 分解可能性について得られている従来の結果を要約するとつぎのようになる。すなわち、 $k=2$  の場合については必要十分条件が文献[2,3]で、 $k \geq 3$  の場合には必要条件といくつかの十分条件が文献[7]で与えられ、 $k=3$  の場合にはこの必要条件が十分タイトであることがわかっている。 $k \geq 4$  の場合については文献[7]で与えられているいくつかの十分条件は正しいが必要条件は正しくない。この誤りを正し、知られている結果を総合すると次の定理がみちびかれる。

定理 1.  $H_{m,k}$  が次数  $c$  の  $k$ -HC 分解可能であるための必要条件は、

- (i)  $(\mathbb{F})$  が  $c$  の倍数、
- (ii)  $m \geq 2c$ ,  $k=2$  のとき [2]、  
 $m \geq 3c/2 + 1$ ,  $k=3$  のとき [7]、  
 $m \geq \{5 - 8c + \sqrt{(112c^2 + 1)}\} / 2$ ,  $k=4$  のとき、  
 $m \geq c + k - 1$ ,  $k \geq 5$  のとき。

$k=2$  のときは文献[2]に示すように十分条件でもある。 $k=3$  のときの必要条件は文献[7]の結果に誤りはないが、その場合を含めて  $k \geq 3$  の場合について必要性を改めて証明する。

$H_{m,k}$  がエッジを共有しない次数  $c$  の  $k$ -HC の和に分解されたとする。任意に  $k-2$  点集合  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-2}\}$  を選び、残りの  $m-k+2$  点を2つの集合  $Q = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$  と  $R = \{z_1, z_2, \dots, z_{m-k-d+2}\}$  すなわち、すべての  $\{y_i\} \cup P \mid y_i \in Q$  がいずれも次数  $c$  の  $k$ -HC のルートであり、すべての  $\{z_i\} \cup P \mid z_i \in R$  はいずれもどの  $k$ -HC のルートでもないように分類する。

$|R| = m - k - d + 2 = 0, 1$  または  $2$  のとき、 $|Q| \equiv d = m - k + 2$ ,  $m - k + 1$  または  $m - k$  である。

いま、 $|R| \geq 3$  として、 $R$  の2点集合  $\{z_i, z_j\}$  にたいして  $k$ -エッジ  $P \cup \{z_i, z_j\}$  を考える。 $\{z_i\} \cup P$ ,  $\{z_j\} \cup P$  はいずれもどの  $k$ -HC のルートでもないので  $z_i, z_j$  と  $P$  の  $k-3$  個の点からなる1つの  $k-1$  点集合が  $k$ -エッジ  $P \cup \{z_i, z_j\}$  を含む  $k$ -HC のルートでなければならない。なお、このようなルートはペア  $\{z_i, z_j\}$  にたいして1つずつ対応する。これらの  $(m-k-d+2)$  個の  $k$ -HC に所属する可能性のある  $k$ -エッジの数を、 $R$  の点を2個含むものと3個含むものとにわけて数えると、不等式

$$(1) \quad (m-k-d+2)c \leq (m-k-d+2)(d+1) + \min(3, k-2)(m-k-d+2)$$

がなりたつ。ここに、右辺第2項の係数  $\min(3, k-2)$  は3点  $z_i, z_j, z_k$  の2点と  $P$  からなる3通りの  $k$ -HC のなかでルートとなる  $P$  の  $k-3$  点のとりかたによりちがったものとなる可能性の最大数で  $k=3$  のとき 1,  $k=4$  のとき 2,  $k \geq 5$  のとき 3 である(文献[7]ではこの値を1としているが  $k \geq 4$  のとき正しくない)。

この不等式から

- (2)  $d \geq 3c/2 - m/2,$   $k = 3$  のとき [7],  
 (3)  $d \geq 3c - 2m + 5,$   $k = 4$  のとき,  
 および,  
 (4)  $m \geq k + c - 1,$   $k \geq 5$  のとき,

がみちびかれる。ここに (4) は  $H_{m,k}$  が次数  $c$  の  $k$ -HC を含むためのトリビアルな必要条件であり、 $k=3$ ,  $k=4$  の場合はそれぞれ  $m \geq c+2$ ,  $m \geq c+3$  となる。このことに注意すると (2) および (3) は  $|R| = 0, 1, 2$  のときもなりたつ。

$k=3$  のとき 不等式 (2) をすべての  $P$  のえらびかたについて適用すると、

$$(\#) \{3c/2 - m/2\} \leq \sum d = 2 (\#) / c$$

となるから、

$$m \geq 3c/2 + 1$$

を得る。

$k=4$  のとき 不等式 (3) をすべての  $P$  のえらびかたについて適用すると、

$$(\#) \{3c - 2m + 5\} \leq \sum d = 3 (\#) / c$$

となるから、

$$m \geq \{5 - 8c + \sqrt{(112c^2 + 1)}\} / 2$$

を得る。

$v^*$  を処理の数、 $k^*$  をブロックの大きさ、 $\lambda_i$  を  $t$  重の会合数とする  $t$ -デザインを考える。

**定理 2.**  $t$ -デザイン  $t - (v^*, k^*, \lambda_i)$  で  $\lambda_i = 1$ ,  $k^* = t + 1$  をみたすものが存在するための必要十分条件は、 $m = v^*$ ,  $k = v^* - k^* + 1$ ,  $c = k^*$  にたいして  $H_{m,k}$  が次数  $c$  の  $k$ -HC 分解可能であることである。なおこの  $k$ -HC 分解は、 $k \geq 5$  の場合の  $m$  の下限  $k + c - 1$  をみたしている。

**証明.**  $t - (v^*, t + 1, 1)$  が存在するとし、 $V$  の大きさ  $k^* = t + 1$  の部分集合である各ブロックについて、その  $k^*$  個の点をリーフとし、残りの  $k - 1 = v^* - k^*$  個の点をルートとする次数  $c = k^*$  の  $k$ -HC をつくと、 $\lambda_i = 1$  かつ  $t = k^* - 1$  であるから、 $m = v^*$  として  $H_{m,k}$  の次数  $c$  の  $k$ -HC 分解が得られる。逆も明らかである。またこの  $k$ -HC 分解が  $k \geq 5$  の場合の  $m$  の下限をみたしていることも明らかである。

Table 1 はよく知られている  $2 - (7, 3, 1)$  デザインを用いて  $H_{7,5}$  を次数 3 の 5-HC に分解した例である。同様に Table 2 は知られている  $3 - (8, 4, 1)$  デザインを用いて  $H_{8,5}$  を次数 4 の 5-HC に分解した例である。

Table 3 は、定理 2 の必要十分条件をみたす  $t$ -デザインについてその存在が知られているいくつかをリストアップし、対応して分解可能となる  $H_{m,k}$  のパラメーター  $m$ ,  $k$  と  $k$ -HC の次数  $c$  をリストしたものである。

Table 1. Decomposition of  $H_{7,5}$  into 5-HC of degree 3

| Root             | Leaves  |
|------------------|---------|
| $\{2, 4, 5, 6\}$ | 0, 1, 3 |
| $\{3, 5, 6, 0\}$ | 1, 2, 4 |
| $\{4, 6, 0, 1\}$ | 2, 3, 5 |
| $\{5, 0, 1, 2\}$ | 3, 4, 6 |
| $\{6, 1, 2, 3\}$ | 4, 5, 0 |
| $\{0, 2, 3, 4\}$ | 5, 6, 1 |
| $\{1, 3, 4, 5\}$ | 6, 0, 2 |

Table 2. Decomposition of  $H_{8,5}$  into 5-HC of degree 4

| Root             | Leaves     |
|------------------|------------|
| $\{4, 6, 7, 8\}$ | 1, 2, 3, 5 |
| $\{5, 7, 1, 8\}$ | 2, 3, 4, 6 |
| $\{6, 1, 2, 8\}$ | 3, 4, 5, 7 |
| $\{7, 2, 3, 8\}$ | 4, 5, 6, 1 |
| $\{1, 3, 4, 8\}$ | 5, 6, 7, 2 |
| $\{2, 4, 5, 8\}$ | 6, 7, 1, 3 |
| $\{3, 5, 6, 8\}$ | 7, 1, 2, 4 |
| $\{1, 2, 4, 7\}$ | 3, 5, 6, 8 |
| $\{2, 3, 5, 1\}$ | 4, 6, 7, 8 |
| $\{3, 4, 6, 2\}$ | 5, 7, 1, 8 |
| $\{4, 5, 7, 3\}$ | 6, 1, 2, 8 |
| $\{5, 6, 1, 4\}$ | 7, 2, 3, 8 |
| $\{6, 7, 2, 5\}$ | 1, 3, 4, 8 |
| $\{7, 1, 3, 6\}$ | 2, 4, 5, 8 |

Table 3. List of parameters of small size  $t$ -designs satisfying the condition of Theorem 2.

2- $(v^*, 3, 1)$  design

Corresponding  $H_{m, k}$  and  $k$ -HC

| $v^*$ | $k^*$ | $b^*$ | $r^*$ | $\lambda_2$ | $m$ | $k$ | $c$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-----|-----|-----|
| 7     | 3     | 7     | 3     | 1           | 7   | 5   | 3   |
| 9     | 3     | 12    | 4     | 1           | 9   | 7   | 3   |
| 13    | 3     | 26    | 6     | 1           | 13  | 11  | 3   |
| 15    | 3     | 35    | 7     | 1           | 15  | 13  | 3   |
| 19    | 3     | 57    | 9     | 1           | 19  | 17  | 3   |
| 21    | 3     | 70    | 10    | 1           | 21  | 19  | 3   |

. . . . .

3- $(v^*, 4, 1)$  design

Corresponding  $H_{m, k}$  and  $k$ -HC

| $v^*$ | $k^*$ | $b^*$ | $r^*$ | $\lambda_3$ | $m$ | $k$ | $c$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-----|-----|-----|
| 8     | 4     | 14    | 7     | 1           | 8   | 5   | 4   |
| 14    | 4     | 91    | 26    | 1           | 14  | 11  | 4   |
| 20    | 4     | 285   | 57    | 1           | 20  | 17  | 4   |
| 26    | 4     | 650   | 100   | 1           | 26  | 23  | 4   |
| 50    | 4     | 4900  | 392   | 1           | 50  | 47  | 4   |

. . . . .

4- $(v^*, 5, 1)$  design (Witt system)

Corresponding  $H_{m, k}$  and  $k$ -HC

| $v^*$ | $k^*$ | $b^*$ | $r^*$ | $\lambda_4$ | $m$ | $k$ | $c$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-----|-----|-----|
| 11    | 5     | 66    | 30    | 1           | 11  | 7   | 5   |

5- $(v^*, 6, 1)$  design (Witt system)

Corresponding  $H_{m, k}$  and  $k$ -HC

| $v^*$ | $k^*$ | $b^*$ | $r^*$ | $\lambda_5$ | $m$ | $k$ | $c$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-----|-----|-----|
| 12    | 6     | 132   | 66    | 1           | 12  | 7   | 6   |

$b^*$  = No. of  $k$ -HC of degree  $c$ .

## REFERENCES

- [1] Abraham, C.T., Ghosh, S.P. and Ray-Chaudhuri, D.K. (1968). File organization schemes based on finite geometries. Information and control, 12, 143-163.
- [2] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975). Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy. Information and Control, 28, 156-175.
- [3] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975). On claw decomposition of complete graphs and complete bigraphs. Hiroshima Math. J., 5, 33-42.
- [4] Yamamoto, S., Tazawa, S., Ushio, K. and Ikeda, H. (1978). Design of a generalized balanced multiple-valued file organization schemes of order two. Proc. 8th ACM-SIGMOD, 47-51.
- [5] Yamamoto, S. (1979). Design of optimal balanced filing schemes. Proc. IBM Working Conf. of Database Engineering, II-23-II-36.
- [6] Yamamoto, S. and Tazawa, S. (1979). Combinatorial aspects of balanced file organization schemes. J. Information Processing, 2, 127-133.
- [7] Yamamoto, S. and Tazawa, S. (1980). Hyperclaw decomposition of complete hypergraphs. Annals of Discrete Mathematics, 6, 385-391.
- [8] Yamamoto, S. (1982). Design of optimal balanced filing schemes. Lecture Notes in Computer Science, No.113, 253-265.
- [9] Yamamoto, S. (1985). Further results on hyperclaw decomposition and balanced filing schemes. Proc. Int. Conf. on Foundation of Data Organization, 129-132.
- [10] Kageyama, S. and Hedayat, A. (1983). The family of t-designs- Part II. J. Statist. Plann. Inf., 7, 257-287.